

# 非完备 $b$ -度量空间上四个非连续映射 具有唯一公共不动点的定理\*

朴勇杰

延边大学理学院数学系, 吉林 延吉 133002

**摘要:** 给出了在非完备的  $b$ -度量空间上满足  $\phi$ -隐式压缩条件或线性压缩条件的 4 个非连续的且满足弱相容条件的自映射具有唯一公共不动点的存在定理。所得结果推广和改进了许多相应的公共不动点定理。最后, 给出实例支撑本文的主要结果。

**关键词:** 公共不动点; 弱相容;  $b$ -度量空间;  $\phi$ -隐式压缩

**中图分类号:** O177.3; O189.11 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2021) 04-0146-08

## Theorems on the unique common fixed point for four non-continuous self-mappings on non-complete $b$ -metric spaces

PIAO Yongjie

Department of Mathematics, College of Science, Yanbian University, Yanji 133002, China

**Abstract:** Several unique common fixed point theorems for four non-continuous and weakly compatible self-mappings satisfying  $\phi$ -implicit contractive condition or linear contractive condition are given on non-complete  $b$ -metric space. The obtained results generalize and improve many corresponding common fixed point theorems. Finally, one of the main results is supported with a relevant example.

**Key words:** common fixed point; weakly compatible;  $b$ -metric space;  $\phi$ -implicit contraction

Czerwik<sup>[1]</sup>于1993年引入了 $b$ -度量空间,即度量型空间的概念并在完备的 $b$ -度量空间框架下推广了Banach压缩原理(Banach不动点定理)。之后,一些研究者在 $b$ -度量空间上讨论并得到了满足各种形式的映射的唯一不动点定理<sup>[2-10]</sup>。2014年,Roshan等<sup>[11]</sup>在 $b$ -度量空间上给出了若干个满足广义压缩条件的4个映射的唯一公共不动点定理,此处 $b$ -度量未必是连续的。文献[11]中的广义压缩条件是Ćirić<sup>[12]</sup>型压缩条件及Hardy-Rogers<sup>[13]</sup>型压缩条件的推广形式,其结果大大地推广和改进了许多(公共)不动点定理。

在本文,通过除去自映射的连续性,用弱相容代替相容并利用一类新的隐式压缩条件而不是Ćirić型及Hardy-Rogers型压缩,在非完备的 $b$ -度量空间上给出文献[11]中的相应结果并举一个实例支撑主要结果。同时,我们在相同的空间上给出具有一类线性压缩条件的4个映射的公共不动点定理。

## 1 基本知识

给出本文中需要的若干定义及相关结果。

**定义 1**<sup>[1]</sup> 设  $X$  是非空集合,  $k \geq 1$  是给定实数。称函数  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$  为一个  $b$ -度量, 如果对任何

\* 收稿日期: 2020-02-27

录用日期: 2020-09-18

网络首发日期: 2021-01-06

基金项目: 国家自然科学基金 (11361064, 11761072)

作者简介: 朴勇杰 (1962年生), 男; 研究方向: 非线性分析和不动点理论; E-mail: sxpyj@ybu.edu.cn

$x, y, z \in X$ , 下列条件成立

- (b1)  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ;
- (b2)  $d(x, y) = d(y, x)$ ;
- (b3)  $d(x, z) \leq k[d(x, y) + d(y, z)]$ .

称  $(X, d)$  为具有  $k \geq 1$  的  $b$ -度量空间。  $b$ -度量空间类明显大于通常的度量空间类, 事实上,  $b$ -度量是通常度量当且仅当  $k = 1$ 。

**例1**<sup>[14]</sup> 设  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  且  $d(x_1, x_2) = k \geq 2, d(x_1, x_3) = d(x_1, x_4) = d(x_2, x_3) = d(x_2, x_4) = d(x_3, x_4) = 1, d(x_i, x_j) = d(x_j, x_i)$  (对所有  $i, j = 1, 2, 3, 4$ ) 及  $d(x_i, x_i) = 0$  (对所有  $i = 1, 2, 3, 4$ )。 则  $d$  是具有  $k/2$  的  $b$ -度量空间, 但不是通常度量空间, 这是因为当  $k > 2$  时  $d(x_1, x_2) > d(x_1, x_3) + d(x_3, x_2)$ 。

**例2**<sup>[14]</sup> 设  $X = \mathbb{R}$  为实数集合。 令  $d(x, y) = (x - y)^2$  (对所有  $x, y \in X$ )。 则  $d$  是具有  $k = 2$  的  $b$ -度量空间, 但不是通常度量, 这是因为  $d(-1, 1) = 4 > 2 = d(-1, 0) + d(0, 1)$ 。

**定义2**<sup>[11, 14]</sup> 设  $(X, d)$  是具有  $k \geq 1$  的  $b$ -度量空间,  $\{x_n\}$  为  $X$  中的序列。

- (a) 称  $\{x_n\}$  收敛于  $x \in X$  是指当  $n \rightarrow \infty$  时  $d(x_n, x) \rightarrow 0$ 。 此时, 记为  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ 。
- (b) 称  $\{x_n\}$  为柯西的是指当  $n, m \rightarrow \infty$  时  $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$ 。
- (c)  $b$ -度量空间  $(X, d)$  是完备的是指  $X$  中的每个柯西序列都收敛。

**命题1**<sup>[15]</sup> 在具有  $k \geq 1$  的  $b$ -度量空间  $(X, d)$  中, 如下结论成立

- (i) 每个收敛序列有唯一极限;
- (ii) 每个收敛序列都是柯西的;
- (iii) 一般情况下,  $b$ -度量未必是连续的。

因为一个度量未必是连续的, 因此下列引理对  $b$ -收敛序列是非常重要的。

**引理1**<sup>[11, 14, 16]</sup> 设  $(X, d)$  是具有  $k \geq 1$  的  $b$ -度量空间。 假设  $\{x_n\}$  和  $\{y_n\}$  分别收敛于  $x$  和  $y$ 。 则

$$\frac{1}{k^2} d(x, y) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \leq k^2 d(x, y).$$

特别地, 如果  $x = y$ , 则有  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0$ 。 进一步, 对任何  $z \in X$ , 如下结果成立

$$\frac{1}{k} d(x, z) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, z) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, z) \leq kd(x, z).$$

**引理2**<sup>[11]</sup> 设  $(X, d)$  是具有  $k \geq 1$  的  $b$ -度量空间。 如果两个序列  $\{x_n\}$  和  $\{y_n\}$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0$  且存在  $x \in X$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$ 。

**引理3**<sup>[14, 16]</sup> 设  $(X, d)$  是具有  $k \geq 1$  的  $b$ -度量空间且  $\{x_n\}$  是  $X$  中的序列使得

$$d(x_n, x_{n+1}) = 0. \quad (1)$$

如果  $\{x_n\}$  不是柯西序列, 则存在  $\varepsilon > 0$  及  $\{x_n\}$  的两个子序列  $\{x_{m(i)}\}$  和  $\{x_{n(i)}\}$  使得如下4个序列

$$d(x_{m(i)}, x_{n(i)}), \quad d(x_{m(i)}, x_{n(i)+1}), \quad d(x_{m(i)+1}, x_{n(i)}), \quad d(x_{m(i)+1}, x_{n(i)+1})$$

满足如下性质

$$\varepsilon \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} d(x_{m(i)}, x_{n(i)}) \leq \limsup_{i \rightarrow \infty} d(x_{m(i)}, x_{n(i)}) \leq \varepsilon k, \quad (2)$$

$$\frac{\varepsilon}{k} \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} d(x_{m(i)}, x_{n(i)+1}) \leq \limsup_{i \rightarrow \infty} d(x_{m(i)}, x_{n(i)+1}) \leq \varepsilon k^2, \quad (3)$$

$$\frac{\varepsilon}{k} \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} d(x_{m(i)+1}, x_{n(i)}) \leq \limsup_{i \rightarrow \infty} d(x_{m(i)+1}, x_{n(i)}) \leq \varepsilon k^2, \quad (4)$$

$$\frac{\varepsilon}{k^2} \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} d(x_{m(i)+1}, x_{n(i)+1}) \leq \limsup_{i \rightarrow \infty} d(x_{m(i)+1}, x_{n(i)+1}) \leq \varepsilon k^3. \quad (5)$$

**引理4** 设  $(X, d)$  是具有  $k \geq 1$  的  $b$ -度量空间且  $\{x_n\}$  是  $X$  中的序列使得

$$d(x_n, x_{n+1}) = 0.$$

如果  $\{x_n\}$  不是柯西序列, 则存在  $\varepsilon > 0$  及  $\{x_n\}$  的两个子序列  $\{x_{m(i)}\}$  和  $\{x_{n(i)}\}$  使得如下4个序列

$$d(x_{m(i)}, x_{n(i)}), \quad d(x_{m(i)}, x_{n(i)-1}), \quad d(x_{m(i)-1}, x_{n(i)}), \quad d(x_{m(i)-1}, x_{n(i)-1})$$

满足如下性质

$$\frac{\varepsilon}{k} \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} d(x_{m(i)}, x_{n(i)-1}) \leq \limsup_{i \rightarrow \infty} d(x_{m(i)}, x_{n(i)-1}) \leq \varepsilon k^2, \quad (6)$$

$$\frac{\varepsilon}{k} \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} d(x_{m(i)-1}, x_{n(i)}) \leq \limsup_{i \rightarrow \infty} d(x_{m(i)-1}, x_{n(i)}) \leq \varepsilon k^2, \quad (7)$$

$$\frac{\varepsilon}{k^2} \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} d(x_{m(i)-1}, x_{n(i)-1}) \leq \limsup_{i \rightarrow \infty} d(x_{m(i)-1}, x_{n(i)-1}) \leq \varepsilon k^3. \quad (8)$$

证明 因为

$$d(x_{m(i)}, x_{n(i)-1}) \leq k [d(x_{m(i)}, x_{n(i)}) + d(x_{n(i)}, x_{n(i)-1})],$$

因此根据式 (1) ~ (2), 得

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} d(x_{m(i)}, x_{n(i)-1}) \leq k \limsup_{i \rightarrow \infty} d(x_{m(i)}, x_{n(i)}) \leq \varepsilon k^2. \quad (9)$$

又因为

$$d(x_{m(i)}, x_{n(i)}) \leq k [d(x_{m(i)}, x_{n(i)-1}) + d(x_{n(i)}, x_{n(i)-1})],$$

因此再次根据式 (1) ~ (2), 也有

$$\varepsilon \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} d(x_{m(i)}, x_{n(i)}) \leq k \liminf_{i \rightarrow \infty} d(x_{m(i)}, x_{n(i)-1}).$$

于是得

$$\frac{\varepsilon}{k} \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} d(x_{m(i)}, x_{n(i)-1}). \quad (10)$$

结合式 (9) ~ (10) 可知式 (6) 成立。类似地, 可证明式 (7) 及式 (8)。

**定义 3**<sup>[11]</sup> 设  $(X, d)$  是具有  $k \geq 1$  的  $b$ -度量空间。称一对映射  $f, g: X \rightarrow X$  是相容的是指当  $X$  中序列  $\{x_n\}$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} fx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} gx_n = t$  (某个  $t \in X$ ) 时  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(fgx_n, gfx_n) = 0$ 。

**定义 4**<sup>[17]</sup> 设  $(X, d)$  是具有  $k \geq 1$  的  $b$ -度量空间。称一对映射  $f, g: X \rightarrow X$  是弱相容的是指当  $fx = gx$  ( $x \in X$ ) 时  $fgx = gfx$ 。

**定义 5**<sup>[18]</sup> 设  $X$  是非空集合且  $f, g: X \rightarrow X$  是两个自映射。如果存在  $u, x \in X$  使得  $u = fx = gx$ , 则称  $x$  为  $f$  和  $g$  的重合点,  $u$  是  $f$  和  $g$  的重合的点。

**引理 5**<sup>[18]</sup> 设  $X$  是非空集合且  $f, g: X \rightarrow X$  是弱相容的。如果  $u$  是  $f$  和  $g$  的唯一的重合的点, 则  $u$  是  $f$  和  $g$  的唯一公共不动点。

**定义 6**  $\phi \in \Phi \Leftrightarrow \phi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  是上半连续的非递减函数使得  $\phi(t) = 0$  当且仅当  $t = 0$ 。

**注记 1** 弱相容概念明显弱于相容概念。

## 2 公共不动点

**定理 1** 设  $(X, d)$  是具有  $k \geq 1$  的  $b$ -度量空间,  $f, g, S, T: X \rightarrow X$  是 4 个映射使其满足  $fX \subseteq TX$  和  $gX \subseteq SX$ 。假设对任何  $x, y \in X$ ,

$$k^4 d(fx, gy) \leq \phi(\max \{d(Sx, Ty), d(fx, Sx), d(gy, Ty), \frac{1}{2} [d(Sx, gy) + d(fx, Ty)]\}), \quad (11)$$

其中  $\phi \in \Phi$  是满足定义 6 的函数且满足对任何  $t > 0, \phi(t) < t$ 。如果  $\{fX, gX, SX, TX\}$  之一是完备的且  $\{f, S\}$  及  $\{g, T\}$  分别是弱相容的。则  $\{f, g, S, T\}$  在  $X$  中存在唯一公共不动点。

**证明** 取  $x_0 \in X$ 。根据  $fX \subseteq TX$  及  $gX \subseteq SX$ , 可构造两个序列  $\{x_n\}$  和  $\{y_n\}$  使其满足

$$y_{2n} = fx_{2n} = Tx_{2n+1}, \quad y_{2n+1} = gx_{2n+1} = Sx_{2n+2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

根据式 (11) ~ (12),

$$k^4 d(y_{2n}, y_{2n+1}) \leq \phi(\max \{d(Sx_{2n}, Tx_{2n+1}), d(fx_{2n}, Sx_{2n}), d(gx_{2n+1}, Tx_{2n+1}), \frac{1}{2} [d(Sx_{2n}, gx_{2n+1}) + d(fx_{2n}, Tx_{2n+1})]\})$$

$$\begin{aligned}
&= \phi(\max \{d(y_{2n-1}, y_{2n}), d(y_{2n+1}, y_{2n}), \frac{1}{2}d(y_{2n-1}, y_{2n+1})\}) \\
&\leq \phi(\max \{d(y_{2n-1}, y_{2n}), d(y_{2n+1}, y_{2n}), \frac{k}{2}[d(y_{2n-1}, y_{2n}) + d(y_{2n}, y_{2n+1})]\}).
\end{aligned} \tag{13}$$

如果存在某个  $n$  使得  $d(y_{2n-1}, y_{2n}) < d(y_{2n}, y_{2n+1})$ , 则根据式 (13) 和  $\phi \in \Phi$  的性质, 将得

$$k^4 d(y_{2n}, y_{2n+1}) \leq \phi(kd(y_{2n}, y_{2n+1})) < kd(y_{2n}, y_{2n+1}).$$

再利用  $d(y_{2n}, y_{2n+1}) > 0$  可知  $k < 1$ , 这与  $k \geq 1$  相矛盾。因此对任何  $n$ ,  $d(y_{2n-1}, y_{2n}) \geq d(y_{2n}, y_{2n+1})$ .

于是再次根据式 (13) 得

$$k^4 d(y_{2n}, y_{2n+1}) \leq \phi(kd(y_{2n-1}, y_{2n})), \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{14}$$

类似地, 可得

$$k^4 d(y_{2n-1}, y_{2n}) \leq \phi(kd(y_{2n-2}, y_{2n-1})), \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{15}$$

由式 (14) ~ (15), 得

$$k^4 d(y_n, y_{n+1}) \leq \phi(kd(y_{n-1}, y_n)), \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{16}$$

如果存在自然数  $N$  使得  $d(y_N, y_{N+1}) = 0$ , 则根据式 (16) 及  $\phi \in \Phi$  的性质, 对所有自然数  $n \geq N$ , 都有  $d(y_n, y_{n+1}) = 0$ , 于是  $\{y_n\}$  可看做常数列, 因此它是柯西序列。所以可假设对所有  $n$ ,  $d(y_n, y_{n+1}) > 0$ . 此时, 利用式 (16) 得

$$k^4 d(y_n, y_{n+1}) \leq \phi(kd(y_{n-1}, y_n)) < kd(y_{n-1}, y_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots.$$

因此

$$d(y_n, y_{n+1}) < \frac{1}{k^3} d(y_{n-1}, y_n) \leq d(y_{n-1}, y_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots.$$

该说明数列  $\{d(y_{n-1}, y_n)\}$  是非递增的非负实数数列。因此存在实数  $u \geq 0$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(y_{n-1}, y_n) = u$ .

如果  $u > 0$ , 则在式 (16) 的两边取极限并利用  $\phi \in \Phi$  的性质得到

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} k^4 d(y_n, y_{n+1}) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \phi(kd(y_{n-1}, y_n)) \leq \phi(\limsup_{n \rightarrow \infty} kd(y_{n-1}, y_n)),$$

即有

$$k^4 u \leq \phi(ku) < ku.$$

因此  $k < 1$ . 这与  $k \geq 1$  相矛盾, 于是必有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(y_{n-1}, y_n) = u = 0. \tag{17}$$

现在, 证明  $\{y_n\}$  是柯西序列。否则, 根据式 (17) 及引理 4, 存在  $\varepsilon > 0$  及  $\{y_n\}$  的两个子序列  $\{y_{n(i)}\}$  和  $\{y_{m(i)}\}$  使得 4 个序列

$$d(y_{m(i)}, y_{n(i)}), \quad d(y_{m(i)}, y_{n(i)-1}), \quad d(y_{m(i)-1}, y_{n(i)}), \quad d(y_{m(i)-1}, y_{n(i)-1})$$

满足式 (2) 和式 (6) ~ (8)。

因为式 (17) 成立, 可假设  $m(i)$  和  $n(i)$  的奇偶性不同。不失一般性, 令  $m(i)$  是偶数,  $n(i)$  是奇数。根据式 (11),

$$\begin{aligned}
k^4 d(y_{m(i)}, y_{n(i)}) &= k^4 d(fx_{m(i)}, gx_{n(i)}) \\
&\leq \phi(\max \{d(Sx_{m(i)}, Tx_{n(i)}), d(fx_{m(i)}, Sx_{m(i)}), d(gx_{n(i)}, Tx_{n(i)}), \frac{1}{2}[d(Sx_{m(i)}, gx_{n(i)}) + d(fx_{m(i)}, Tx_{n(i)})]\}) \\
&= \phi(\max \{d(y_{m(i)-1}, y_{n(i)-1}), d(y_{m(i)}, y_{m(i)-1}), d(y_{n(i)}, y_{n(i)-1}), \frac{1}{2}[d(y_{m(i)-1}, y_{n(i)}) + d(y_{m(i)}, y_{n(i)-1})]\}).
\end{aligned} \tag{18}$$

因此利用引理 3~引理 4, 由式 (18) 得到

$$\begin{aligned}
\varepsilon k^4 &\leq k^4 \liminf_{i \rightarrow \infty} d(y_{m(i)}, y_{n(i)}) \\
&\leq k^4 \limsup_{i \rightarrow \infty} d(y_{m(i)}, y_{n(i)}) \\
&\leq \phi(\max \{ \limsup_{i \rightarrow \infty} d(y_{m(i)-1}, y_{n(i)-1}), \limsup_{i \rightarrow \infty} d(y_{m(i)}, y_{m(i)-1}), \limsup_{i \rightarrow \infty} d(y_{n(i)}, y_{n(i)-1}), \\
&\quad \frac{1}{2} [ \limsup_{i \rightarrow \infty} d(y_{m(i)-1}, y_{n(i)}) + \limsup_{i \rightarrow \infty} d(y_{m(i)}, y_{n(i)-1}) ] \})
\end{aligned} \tag{19}$$

$$= \phi(\max\{\varepsilon k^3, 0, \varepsilon k^2\}) = \phi(\varepsilon k^3) < \varepsilon k^3.$$

该式推出  $k < 1$ , 这与  $k \geq 1$  相矛盾。于是  $\{y_n\}$  是柯西序列。

假设  $TX$  是完备的, 则存在  $u \in TX$  和  $v \in X$  使得  $y_{2n} = fx_{2n} = Tx_{2n+1} \rightarrow u = Tv$  (当  $n \rightarrow \infty$  时)。因此  $d(y_{2n+1}, u) \leq k[d(y_{2n+1}, y_{2n}) + d(y_{2n}, u)]$  导出  $y_{2n+1} \rightarrow u = Tv$  (当  $n \rightarrow \infty$  时)。(如果  $fX$  是完备的, 则存在  $u \in fX \subseteq TX$  使得  $y_{2n} = fx_{2n} \rightarrow u$  (当  $n \rightarrow \infty$  时)。因此结论仍然成立。)

如果  $d(u, gv) > 0$ , 则根据引理 1 及式 (11) 得到

$$\begin{aligned} k^3 d(u, gv) &= k^4 \frac{d(u, gv)}{k} \\ &\leq k^4 \limsup_{n \rightarrow \infty} d(fx_{2n}, gv) \\ &\leq \phi(\max\{\limsup_{n \rightarrow \infty} d(Sx_{2n}, Tv), \limsup_{n \rightarrow \infty} d(fx_{2n}, Sx_{2n}), \limsup_{n \rightarrow \infty} d(gv, Tv)\}, \\ &\quad \frac{1}{2} [\limsup_{n \rightarrow \infty} d(Sx_{2n}, gv) + \limsup_{n \rightarrow \infty} d(fx_{2n}, Tv)]) \\ &\leq \phi(\max\{kd(u, Tv), k^2 d(u, u), d(u, gv), \frac{1}{2} [kd(u, gv) + kd(u, Tv)]\}) \\ &\leq \phi(\max\{d(u, gv), \frac{k}{2} d(u, gv)\}) \\ &< \max\{1, \frac{k}{2}\} d(u, gv). \end{aligned}$$

这推出  $k < 1$ , 这与  $k \geq 1$  相矛盾。于是必有  $gv = u = Tv$ , 即  $u$  是  $g$  和  $T$  的重合的点。

因为  $u = gv \in gX \subseteq SX$ , 因此  $w \in X$  使得  $u = Sw$ 。如果  $d(u, fw) > 0$ , 则再次根据引理 1 及式 (11) 得到

$$\begin{aligned} k^3 d(fw, u) &= k^4 \frac{d(fw, u)}{k} \\ &\leq k^4 \limsup_{n \rightarrow \infty} d(fw, gx_{2n+1}) \\ &\leq \phi(\max\{\limsup_{n \rightarrow \infty} d(Sw, Tx_{2n+1}), \limsup_{n \rightarrow \infty} d(fw, Sw), \limsup_{n \rightarrow \infty} d(gx_{2n+1}, Tx_{2n+1}), \\ &\quad \frac{1}{2} [\limsup_{n \rightarrow \infty} d(Sw, gx_{2n+1}) + \limsup_{n \rightarrow \infty} d(fw, Tx_{2n+1})]) \\ &\leq \phi(\max\{kd(Sw, u), d(fw, u), k^2 d(u, u), \frac{1}{2} [kd(Sw, u) + kd(fw, u)]\}) \\ &< \max\{1, \frac{k}{2}\} d(fw, u). \end{aligned}$$

该式也导出与  $k \geq 1$  相矛盾的结果  $k < 1$ 。于是  $fw = u = Sw$ , 即  $u$  是  $f$  和  $S$  的重合的点。

如果  $z$  是  $f$  和  $S$  的另一个重合的点, 则  $d(u, z) > 0$  且存在  $x \in X$  使得  $z = fx = Sx$ 。根据式 (11),

$$k^4 d(fx, gv) \leq \phi(\max\{d(Sx, Tv), d(fx, Sx), d(gv, Tv), \frac{1}{2} [d(Sx, gv) + d(fx, Tv)]\}).$$

因此

$$k^4 d(z, u) \leq \phi(d(z, u)) < d(z, u).$$

这也是矛盾。因此  $u$  是  $f$  和  $S$  的唯一重合的点, 于是根据引理 5 知  $u$  是  $f$  和  $S$  的唯一公共不动点。类似地,  $u$  是  $g$  和  $T$  的唯一公共不动点。显然  $u$  是  $\{f, g, S, T\}$  的唯一公共不动点, 因此省去其证明过程。

类似地可证明, 当  $gX$  或  $SX$  完备时, 同样成立相同的结果。

**例 1** 设  $X = [0, 1]$  赋予  $b$ -度量  $d(x, y) = (x - y)^2, x, y \in X$ , 则  $(X, d)$  是具有  $k = 2$  的  $b$ -度量空间。定义  $X$  上的 4 个自映射  $f, g, S, T$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{x}{4}\right)^8, & x \in [0, 1], & f(1) = 0; & g(x) &= \left(\frac{x}{4}\right)^4, & x \in [0, 1], & g(1) = 0; \\ S(x) &= \left(\frac{x}{4}\right)^4, & x \in [0, 1], & S(1) = 0; & T(x) &= \left(\frac{x}{4}\right)^2, & x \in [0, 1], & T(1) = 0. \end{aligned}$$

则  $fX \subseteq TX$  且  $gX \subseteq SX$ .  $fx = Sx$  当且仅当  $x = 0, 1$  且  $gx = Tx$  当且仅当  $x = 0, 1$ , 因此  $\{f, S\}$  和  $\{g, T\}$  分别是弱

相容的。又  $f, g, S, T$  在  $[0, 1]$  上都是非连续的。取  $\phi(t) = \frac{t}{1+t}, t \in [0, +\infty)$ , 则显然  $\phi \in \Phi$ .

令

$$M(f, g, S, T, x, y) = \max \{ d(Sx, Ty), d(fx, Sx), d(gy, Ty), \frac{1}{2} [d(Sx, gy) + d(fx, Ty)] \}, x, y \in X.$$

如果  $x = y = 1$ , 则式 (11) 成立。如果  $x = 1, y \in [0, 1)$ , 则

$$k^4 d(fx, gy) = 2^4 \left(\frac{y}{4}\right)^8 = \frac{y^8}{4^6} \leq \frac{y^4}{4^4 + y^4} = \frac{\left(\frac{y}{4}\right)^4}{1 + \left(\frac{y}{4}\right)^4} = \phi(d(Sx, Ty)) \leq \phi(M(f, g, S, T, x, y)).$$

如果  $x \in [0, 1), y = 1$ , 则

$$k^4 d(fx, gy) = 2^4 \left(\frac{x}{4}\right)^{16} = \frac{x^{16}}{4^{14}} \leq \frac{x^8}{4^8 + x^8} = \frac{\left(\frac{x}{4}\right)^8}{1 + \left(\frac{x}{4}\right)^8} = \phi(d(Sx, Ty)) \leq \phi(M(f, g, S, T, x, y)).$$

如果  $x \neq 1, y \neq 1$ , 则

$$k^4 d(fx, gy) = 2^4 \left[ \left(\frac{x}{4}\right)^8 - \left(\frac{y}{4}\right)^4 \right]^2 = 2^4 \left[ \left(\frac{x}{4}\right)^4 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 \right]^2 \left[ \left(\frac{x}{4}\right)^4 - \left(\frac{y}{4}\right)^2 \right]^2 < \left(\frac{17}{64}\right)^2 \left[ \left(\frac{x}{4}\right)^4 - \left(\frac{y}{4}\right)^2 \right]^2,$$

且

$$\phi(d(Sx, Ty)) = \frac{\left[ \left(\frac{x}{4}\right)^4 - \left(\frac{y}{4}\right)^2 \right]^2}{1 + \left[ \left(\frac{x}{4}\right)^4 - \left(\frac{y}{4}\right)^2 \right]^2} \geq \frac{\left[ \left(\frac{x}{4}\right)^4 - \left(\frac{y}{4}\right)^2 \right]^2}{1 + \left[ \left(\frac{1}{4}\right)^4 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \right]^2} > \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{x}{4}\right)^4 - \left(\frac{y}{4}\right)^2 \right]^2.$$

因此

$$k^4 d(fx, gy) < \left(\frac{17}{64}\right)^2 \left[ \left(\frac{x}{4}\right)^4 - \left(\frac{y}{4}\right)^2 \right]^2 < \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{x}{4}\right)^4 - \left(\frac{y}{4}\right)^2 \right]^2 < \phi(d(Sx, Ty)) \leq \phi(M(f, g, S, T, x, y)).$$

于是,  $f, g, S, T, \phi$  满足定理 1 的所有条件, 故  $f, g, S, T$  有唯一公共不动点 0.

**定理 2** 设  $(X, d)$  是具有  $k \geq 1$  的  $b$ -度量空间,  $f, g, S, T: X \rightarrow X$  是 4 个映射使其满足  $fX \subseteq TX$  和  $gX \subseteq SX$ . 假设对任何  $x, y \in X$ ,

$$k^3 d(fx, gy) \leq a_1 d(Sx, Ty) + a_2 d(fx, Sx) + a_3 d(gy, Ty) + a_4 d(Sx, gy) + a_5 d(fx, Ty), \quad (20)$$

其中  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \geq 0$  满足  $a_1 + a_2 + a_3 + 2k \max \{ a_4, a_5 \} < k^2$ . 如果  $\{fX, gX, SX, TX\}$  中任何一个完备的且  $\{f, S\}$  及  $\{g, T\}$  分别是弱相容的。则  $\{f, g, S, T\}$  在  $X$  有唯一公共不动点。

**证明** 考虑满足式 (12) 的两个序列  $\{x_n\}$  和  $\{y_n\}$ . 根据式 (20),

$$\begin{aligned} k^3 d(y_{2n}, y_{2n+1}) &= k^3 d(fx_{2n}, gx_{2n+1}) \\ &\leq a_1 d(Sx_{2n}, Tx_{2n+1}) + a_2 d(fx_{2n}, Sx_{2n}) + a_3 d(gx_{2n+1}, Ty_{2n+1}) + a_4 d(Sx_{2n}, gx_{2n+1}) + a_5 d(fx_{2n}, Ty_{2n+1}) \\ &= a_1 d(y_{2n-1}, y_{2n}) + a_2 d(y_{2n}, y_{2n-1}) + a_3 d(y_{2n+1}, y_{2n}) + a_4 d(y_{2n-1}, y_{2n+1}) \\ &\leq a_1 d(y_{2n-1}, y_{2n}) + a_2 d(y_{2n}, y_{2n-1}) + a_3 d(y_{2n+1}, y_{2n}) + ka_4 [d(y_{2n-1}, y_{2n}) + d(y_{2n}, y_{2n+1})]. \end{aligned}$$

因此得到

$$d(y_{2n}, y_{2n+1}) \leq \frac{a_1 + a_2 + ka_4}{k^3 - a_3 - ka_4} d(y_{2n-1}, y_{2n}), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (21)$$

类似地, 得到

$$d(y_{2n+1}, y_{2n+2}) \leq \frac{a_1 + a_3 + ka_5}{k^3 - a_2 - ka_5} d(y_{2n}, y_{2n+1}), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (22)$$

令  $\lambda = \max \left\{ \frac{a_1 + a_2 + ka_4}{k^3 - a_3 - ka_4}, \frac{a_1 + a_3 + ka_5}{k^3 - a_2 - ka_5} \right\}$ , 则由式 (21) ~ (22) 可得

$$d(y_n, y_{n+1}) \leq \lambda d(y_{n-1}, y_n) \leq \cdots \leq \lambda^n d(y_0, y_1), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (23)$$

根据  $a_1 + a_2 + a_3 + 2k \max \{a_4, a_5\} < k^2$ , 可得

$$ka_1 + ka_2 + a_3 + k(k+1)a_4 \leq ka_1 + ka_2 + ka_3 + 2k^2a_4 < k^3,$$

和

$$ka_1 + a_2 + ka_3 + k(k+1)a_5 \leq ka_1 + ka_2 + ka_3 + 2k^2a_5 < k^3.$$

由上两式得  $k \frac{a_1 + a_2 + ka_4}{k^3 - a_3 - ka_4} < 1$ ,  $k \frac{a_1 + a_3 + ka_5}{k^3 - a_2 - ka_5} < 1$ . 于是,  $k\lambda < 1$  且  $\lambda \in [0, 1)$ .

设  $n > m$ , 则

$$d(y_m, y_n) \leq kd(y_m, y_{m+1}) + k^2d(y_{m+1}, y_{m+2}) + \cdots + k^{n-m-1}d(y_{n-2}, y_{n-1}) + k^{n-m-1}d(y_{n-1}, y_n).$$

因此根据式 (23) 及  $k\lambda < 1$  得

$$\begin{aligned} d(y_m, y_n) &\leq [k\lambda^m + k^2\lambda^{m+1} + \cdots + k^{n-m-1}\lambda^{n-2}]d(y_0, y_1) + k^{n-m-1}\lambda^{n-1}d(y_0, y_1) \\ &\leq [k\lambda^m + k^2\lambda^{m+1} + \cdots + k^{n-m-1}\lambda^{n-2}]d(y_0, y_1) + k^{n-m}\lambda^{n-1}d(y_0, y_1) \\ &\leq k\lambda^m [1 + (k\lambda) + (k\lambda)^2 + \cdots]d(y_0, y_1) \\ &= \frac{k\lambda^m}{1 - k\lambda} d(y_0, y_1) \rightarrow 0 \quad (\text{当 } m \rightarrow \infty \text{ 时}). \end{aligned}$$

于是  $\{y_n\}$  是柯西序列。

假设  $TX$  是完备的, 则存在  $u \in TX$  和  $v \in X$  使得  $y_{2n} = fx_{2n} = Tx_{2n+1} \rightarrow u = Tv$  (当  $n \rightarrow \infty$  时)。因此  $d(y_{2n+1}, u) \leq k[d(y_{2n+1}, y_{2n}) + d(y_{2n}, u)]$  导出  $y_{2n+1} \rightarrow u = Tv$  (当  $n \rightarrow \infty$  时)。(如果  $fX$  是完备的, 则存在  $u \in fX \subseteq TX$  使得  $y_{2n} = fx_{2n} \rightarrow u$  (当  $n \rightarrow \infty$  时)。因此结论仍然成立。)

如果  $d(u, gv) > 0$ , 则根据引理 1 和式 (20), 得

$$\begin{aligned} k^2 d(u, gv) &= k^3 \frac{d(u, gv)}{k} \leq k^3 \limsup_{n \rightarrow \infty} d(fx_{2n}, gv) \\ &\leq a_1 \limsup_{n \rightarrow \infty} d(Sx_{2n}, Tv) + a_2 \limsup_{n \rightarrow \infty} d(fx_{2n}, Sx_{2n}) + a_3 \limsup_{n \rightarrow \infty} d(gv, Tv) \\ &\quad + a_4 \limsup_{n \rightarrow \infty} d(Sx_{2n}, gv) + a_5 \limsup_{n \rightarrow \infty} d(fx_{2n}, Tv) \\ &\leq a_1 kd(u, Tv) + a_2 k^2 d(u, u) + a_3 d(gv, Tv) + a_4 kd(u, gv) + a_5 kd(u, Tv) \\ &= (a_3 + ka_4)d(u, gv). \end{aligned}$$

因此  $k^2 \leq a_3 + ka_4 \leq a_1 + a_2 + a_3 + 2k \max \{a_4, a_5\} < k^2$ , 这是一个矛盾。于是必有  $gv = u = Tv$ , 即  $u$  是  $g$  和  $T$  的重合的点。

因为  $u = gv \in gX \subseteq SX$ , 存在  $w \in X$  使得  $u = Sw$ . 如果  $d(u, fw) > 0$ , 则根据引理 1 和式 (20), 得到

$$\begin{aligned} k^2 d(fw, u) &= k^3 \frac{d(fw, u)}{k} \\ &\leq k^3 \limsup_{n \rightarrow \infty} d(fw, gx_{2n+1}) \\ &\leq a_1 \limsup_{n \rightarrow \infty} d(Sw, Tx_{2n+1}) + a_2 \limsup_{n \rightarrow \infty} d(fw, Sw) + a_3 \limsup_{n \rightarrow \infty} d(gx_{2n+1}, Tx_{2n+1}) \\ &\quad + a_4 \limsup_{n \rightarrow \infty} d(Sw, gx_{2n+1}) + a_5 \limsup_{n \rightarrow \infty} d(fw, Tx_{2n+1}) \\ &\leq a_1 kd(Sw, u) + a_2 d(fw, Sw) + a_3 k^2 d(u, u) + a_4 kd(Sw, u) + a_5 kd(fw, u) \\ &= (a_2 + ka_5)d(fw, u). \end{aligned}$$

因此  $k^2 \leq a_2 + ka_5 \leq a_1 + a_2 + a_3 + 2k \max \{a_4, a_5\} < k^2$ , 这也是一个矛盾。于是  $fw = u = Sw$ , 即  $u$  是  $f$  和  $S$  的重合的点。

如果  $z$  是另一个  $f$  和  $S$  的重合的点, 则  $d(u, z) > 0$  且存在  $x \in X$  使得  $z = fx = Sx$ . 则根据式 (20),

$$k^3 d(fx, gv) \leq a_1 d(Sx, Tv) + a_2 d(fx, Sx) + a_3 d(gv, Tv) + a_4 d(Sx, gv) + a_5 d(fx, Tv),$$

整理得

$$k^3 d(z, u) \leq (a_1 + a_4 + a_5) d(z, u).$$

因此  $k^3 \leq a_1 + a_4 + a_5 \leq a_1 + a_4 + a_3 + 2k \max\{a_4, a_5\} < k^2$ , 于是  $k < 1$ , 这又是一个矛盾。于是  $f$  和  $S$  只有唯一的重合的点。所以根据引理 5 和  $\{f, S\}$  的弱相容性可知  $u$  是  $f$  和  $S$  的唯一公共不动点。类似地,  $u$  也是  $g$  和  $T$  的唯一公共不动点, 因此  $u$  是  $\{f, g, S, T\}$  的公共不动点。显然  $u$  是  $\{f, g, S, T\}$  的唯一公共不动点。

类似地, 可证明当  $gX$  或  $SX$  是完备时成立相同的结论, 在此省略。

#### 参考文献:

- [1] CZERWIK S. Contraction mappings in  $b$ -metric spaces [J]. Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis, 1993, 1: 5-11.
- [2] AKKOUCHE M. Common fixed point theorems for two selfmappings of a  $b$ -metric space under an implicit relation [J]. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 2011, 40(6): 805-810.
- [3] AYDI H, BOTA M, KARAPINAR E, et al. A fixed point theorem for set-valued quasi-contractions on  $b$ -metric spaces [J]. Fixed Point Theory and Appl, 2012: 88.
- [4] BOTA M, MOLNAR A, VARGA C. On Ekeland's variational principle in  $b$ -metric spaces [J]. Fixed Point Theory, 2011, 12(2): 21-28.
- [5] HUSSAIN N, DORIĆ D, KADELBURG Z, et al. Suzuki-type fixed point results in metric type spaces [J]. Fixed Point Theory and Appl, 2012: 126. DOI: 10.1186/1687-1812-2012-126.
- [6] HUSSAIN N, SHAH M H. KKM mappings in cone  $b$ -metric spaces [J]. Comput Math Appl, 2011, 62(4): 1677-1684.
- [7] JOVANOVIĆ M, KADELBURG Z, RADENOVIĆ S. Common fixed point results in metric type spaces [J]. Fixed Point Theory and Appl, 2010(1): 1-15. DOI: 10.1155/2010/978121.
- [8] KHAMSI M A. Remarks on cone metric spaces and fixed point theorems for contractive mappings [J]. Fixed Point Theory and Appl, 2010: 315398. DOI: 10.1155/2010/315398.
- [9] CHEN C, DONG J, ZHU C. Some fixed point theorems in  $b$ -metric-like spaces [J]. Fixed Point Theory and Appl, 2015(1): 122.
- [10] SHAHKOORI R J, RAZANI A. Some fixed point theorems for rational Geraghty contractive mappings in ordered  $b$ -metric spaces [J]. Journal of Inequalities and Applications, 2014(1): 373.
- [11] ROSHAN J R, SHOBKOLAEI N, SEDGHI S, et al. Common fixed point four maps in  $b$ -metric spaces [J]. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 2014, 43(4): 613-624.
- [12] ĆIRIĆ L B. A generalization of Banach's contraction principle [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1974, 45: 267-273.
- [13] HARDY G E, ROGERS T D. A generalization of a fixed point theorem of Reich [J]. Canadian Mathematical Bulletin, 1973, 16: 201-206.
- [14] PREETI K, SANJAY K, KENAN T. A new class of contraction in  $b$ -metric spaces and applications [J]. Abstract and Applied Anal, 2017: 1-10.
- [15] BORICEANU M, BOTA M, PETRUSEL A. Multivalued fractals in  $b$ -metric spaces [J]. Cent Eur J Math, 2010, 8(2): 367-377.
- [16] ROSHAN J R, PARVANEH V, KADELBURG Z. Common fixed point theorems for weakly isotone increasing mappings in ordered  $b$ -metric spaces [J]. Journal of Nonlinear Science and its Applications(JNSA), 2014, 7(4): 229-245.
- [17] BARI C D, VETRO P.  $\phi$ -pairs and common fixed points in cone metric spaces [J]. Rendiconti Del Circolo Matematico Palermo, 2008, 57: 279-285.
- [18] ABBAS M, JUNGCK G. Common fixed point results for noncommuting mappings without continuity in cone metric spaces [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006, 341(1): 416-420.

(责任编辑 冯兆永)